

Messung der Zentralkraft

Als Zentralkraft \vec{F}_Z wird eine Kraft bezeichnet, die auf einen bewegten Körper der Masse m so einwirkt, dass sich dieser auf einer Kreisbahn des Radius r mit einer Winkelgeschwindigkeit ω bewegt. In diesem Versuch soll durch Messung ermittelt werden, wie der Betrag von \vec{F}_Z von m , r und ω abhängt.

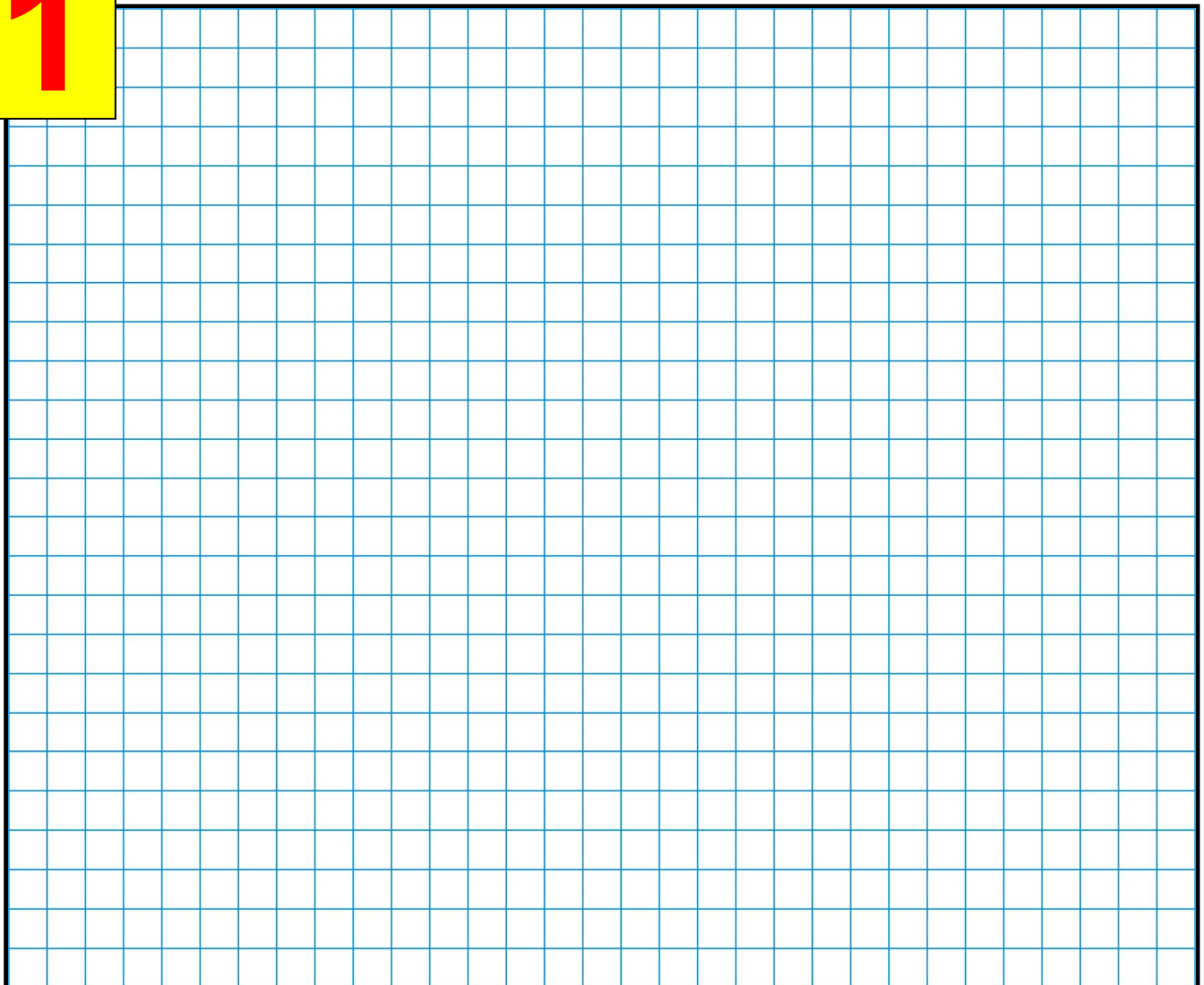
Aufgabe**0**

Sehen Sie sich in Youtube das Video „Bestimmen der Formel der Zentripetalkraft“ (Web-Adresse „<https://www.youtube.com/watch?v=mahDrJJENfU>“; Dauer: 14:01) an.

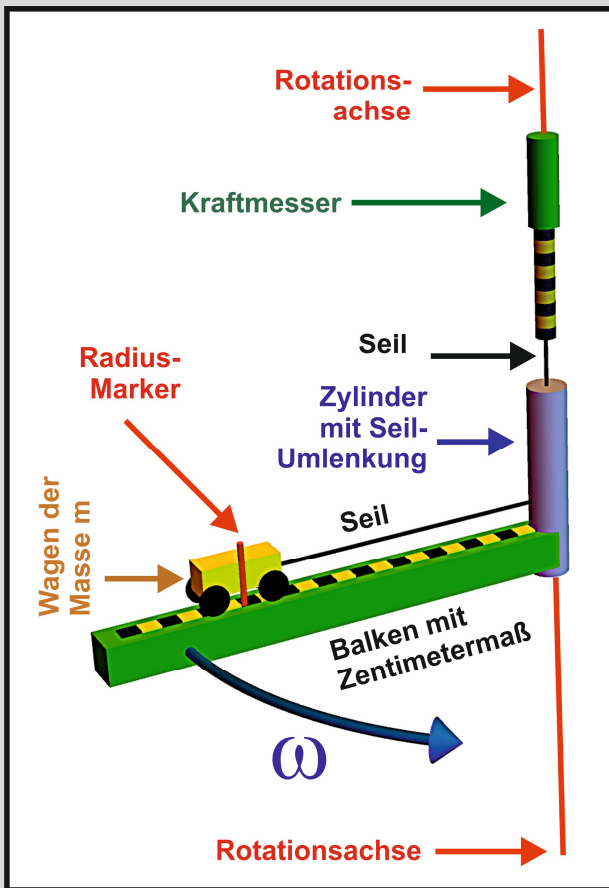
Machen Sie sich auf einem separaten Blatt Papier ausführliche Notizen zum Versuchsaufbau und zur Versuchsdurchführung (sehen Sie sich im Bedarfsfall das Video ein zweites Mal an). Im Folgenden werden schrittweise die Daten einer Messreihe ausgewertet, die mit einer im Video gezeigten Versuchsanordnung gemessen wurden.

Aufgabe**1**

Erstellen Sie in dem folgenden Feld eine Skizze zum Versuchsaufbau zur **Messung der Zentralkraft**. Diese Skizze muss die **wesentlichen Komponenten** des Versuchsaufbaus enthalten. Beschreiben Sie in wenigen Worten die Funktionen dieser Komponenten:



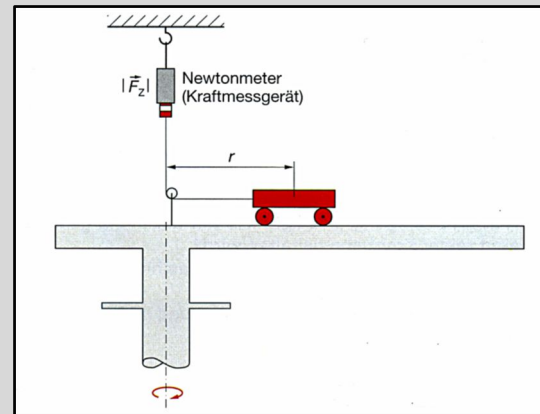
Lösung zu Aufgabe 1:



Die Skizze zum Versuchsaufbau muss enthalten:

- Rotationsachse
- Balken mit Zentimetermaß
- Zylinder mit Motor, der Balken zur Rotation bringt.
- Wagen mit Radiusmesser und Massestücke
- Kraftmesser, höhenverstellbar
- Seil zwischen Wagen und Kraftmesser (das Seil wird im Zylinder umgelenkt). Das Seil übt die Zentralkraft auf den Wagen aus.

Unten: Alternative Versuchsskizze aus einem Schulbuch



Aufgabe

2

Beschreiben Sie in knappen Sätzen, von welchen Größen die Zentralkraft abhängig ist. **Erklären Sie** unter Verwendung der in Aufgabe 1 erstellten Versuchsskizze, wie ein Versuch zur Messung des Betrages F_z der Zentralkraft in Abhängigkeit von m , r und ω durchgeführt wird:

Lösung zu Aufgabe 2:

Der Balken mit dem Wagen wird durch einen Motor zur Rotation gebracht. Durch das umgelenkte Seil wird die Kraft, die der Kraftmesser anzeigt, so auf den Wagen übertragen, dass dieser in eine Kreisbahn gezwungen wird (Zentralkraft). Für einen Einzelversuch werden eingestellt:

- Masse m des Wagens durch Auflegen unterschiedlicher Probemassen
- Winkelgeschwindigkeit ω der Kreisbewegung durch entsprechende Einstellung am Motor
- Radius r der Kreisbewegung durch Höhenverstellung des Kraftmessers.

Der Gesamtversuch besteht aus drei Messreihen:

- Messreihe 1: ω und m werden fest eingestellt, r wird variiert: F_Z wird abgelesen
- Messreihe 2: ω und r werden fest eingestellt, m wird variiert: F_Z wird abgelesen
- Messreihe 3: m und r werden fest eingestellt, ω wird variiert: F_Z wird abgelesen

Jeder Messreihe wird in einer separaten Wertetabelle erfasst.

Aufgabe

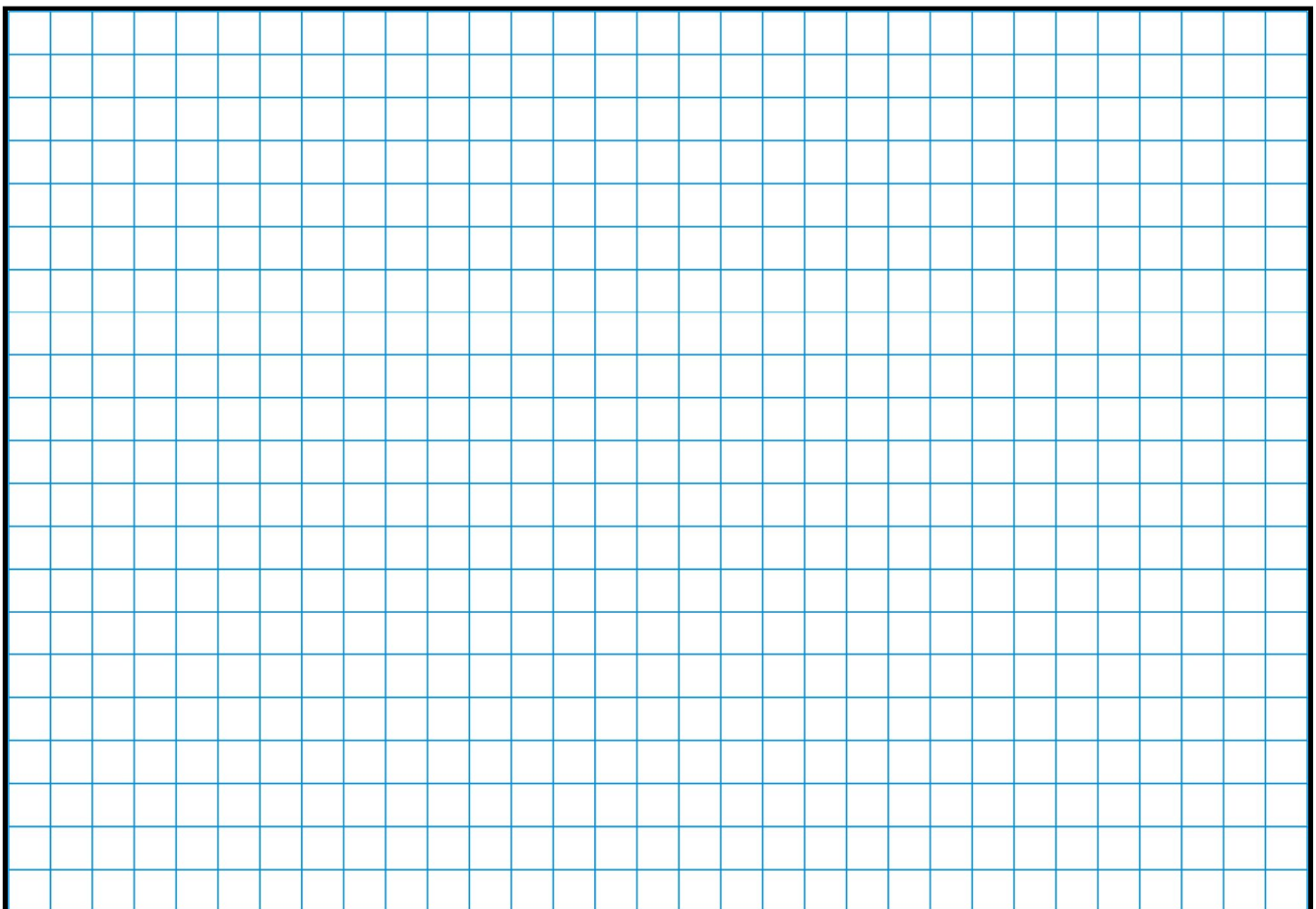
3

In einer **ersten Messreihe** wird der Betrag F_Z der Zentralkraft in Abhängigkeit vom Kreisbahnradius r gemessen. Die Winkelgeschwindigkeit wird dabei konstant auf $\omega = 6,0 \text{ s}^{-1}$ eingestellt, die Gesamt-Masse des Wagens auf $1,5 \text{ kg}$ (Messwerttabelle 1, rechts).

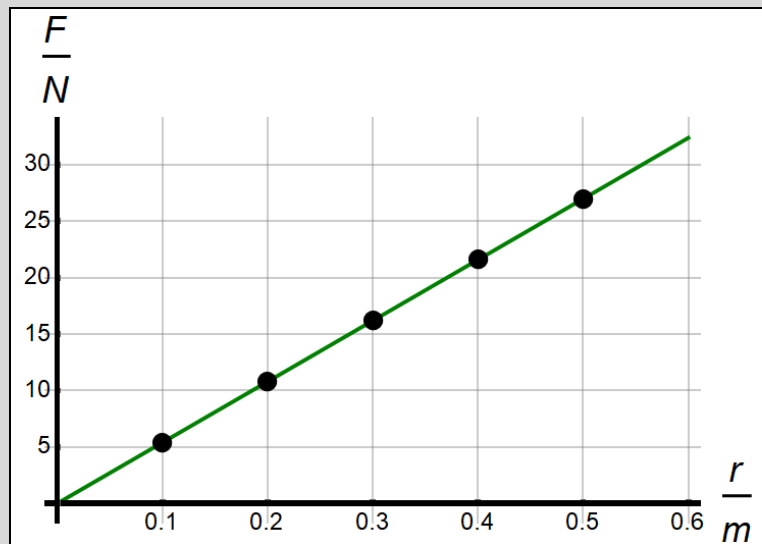
Zeigen Sie durch graphische Auswertung, dass $F_Z \sim r$. Ermitteln Sie aus der Graphik die Proportionalitätskonstante k_r so, dass $F_Z = k_r \cdot r$.

Messwerte 1:

$\frac{r}{m}$	$\frac{F_Z}{N}$
0,10	5,4
0,20	10,8
0,30	16,2
0,40	21,6
0,50	27,0



Lösung zu Aufgabe 3:



Ursprungsgerade $\rightarrow F_Z \sim r$

Aus der Steigung der Geraden (Steigungsdreieck !) ergibt sich:

$$k_r = 54 \frac{N}{m} \rightarrow F_Z = 54 \frac{N}{m} r$$

Aufgabe

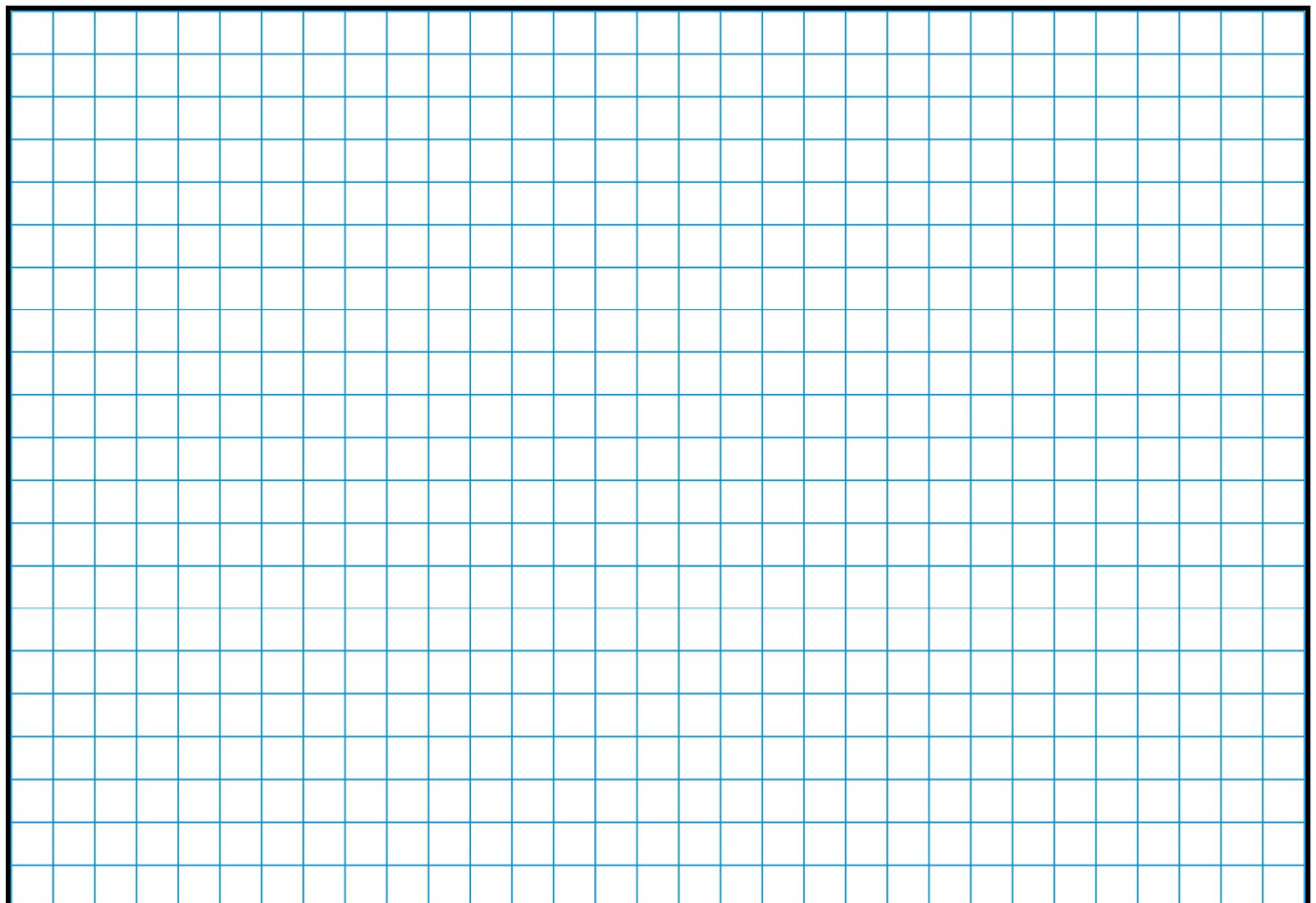
4

In einer **zweiten Messreihe** wird der Betrag F_Z der Zentralkraft in Abhängigkeit von der Masse m des Wagens gemessen. Die Winkelgeschwindigkeit wird dabei wieder konstant auf $\omega = 6,0 \text{ s}^{-1}$ eingestellt, der Radius der Kreisbahn beträgt $r = 0,50 \text{ m}$ (Messwerttabelle 2, rechts).

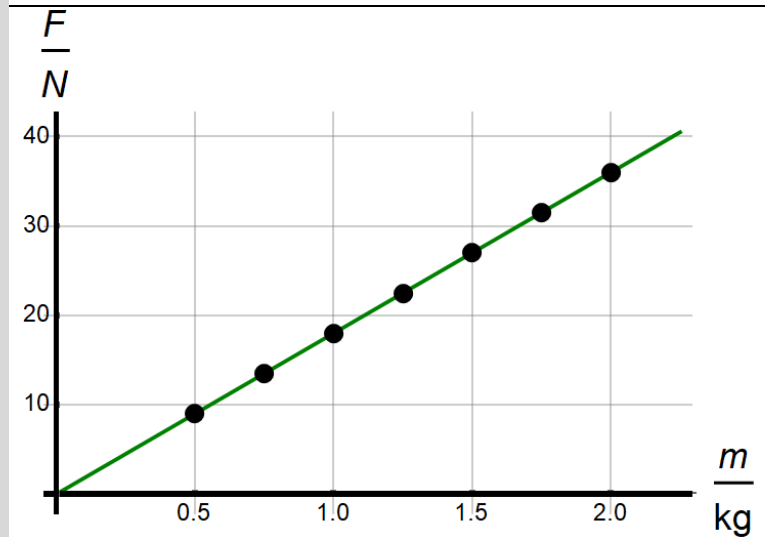
Zeigen Sie durch graphische Auswertung, dass $F_Z \sim m$. Ermitteln Sie aus der Graphik die Proportionalitätskonstante k_m so, dass $F_Z = k_m \cdot m$.

Messwerte 2:

$\frac{m}{kg}$	$\frac{F_Z}{N}$
0,50	9,0
0,75	13,5
1,00	18,0
1,25	22,5
1,50	27,0
1,75	31,5
2,00	36,0



Lösung zu Aufgabe 4:



Ursprungsgerade $\rightarrow F_Z \sim m$

Aus der Steigung der Geraden (Steigungsdreieck !) ergibt sich:

$$k_m = 18 \frac{N}{kg} \rightarrow F_Z = 18 \frac{N}{kg} m$$

Aufgabe

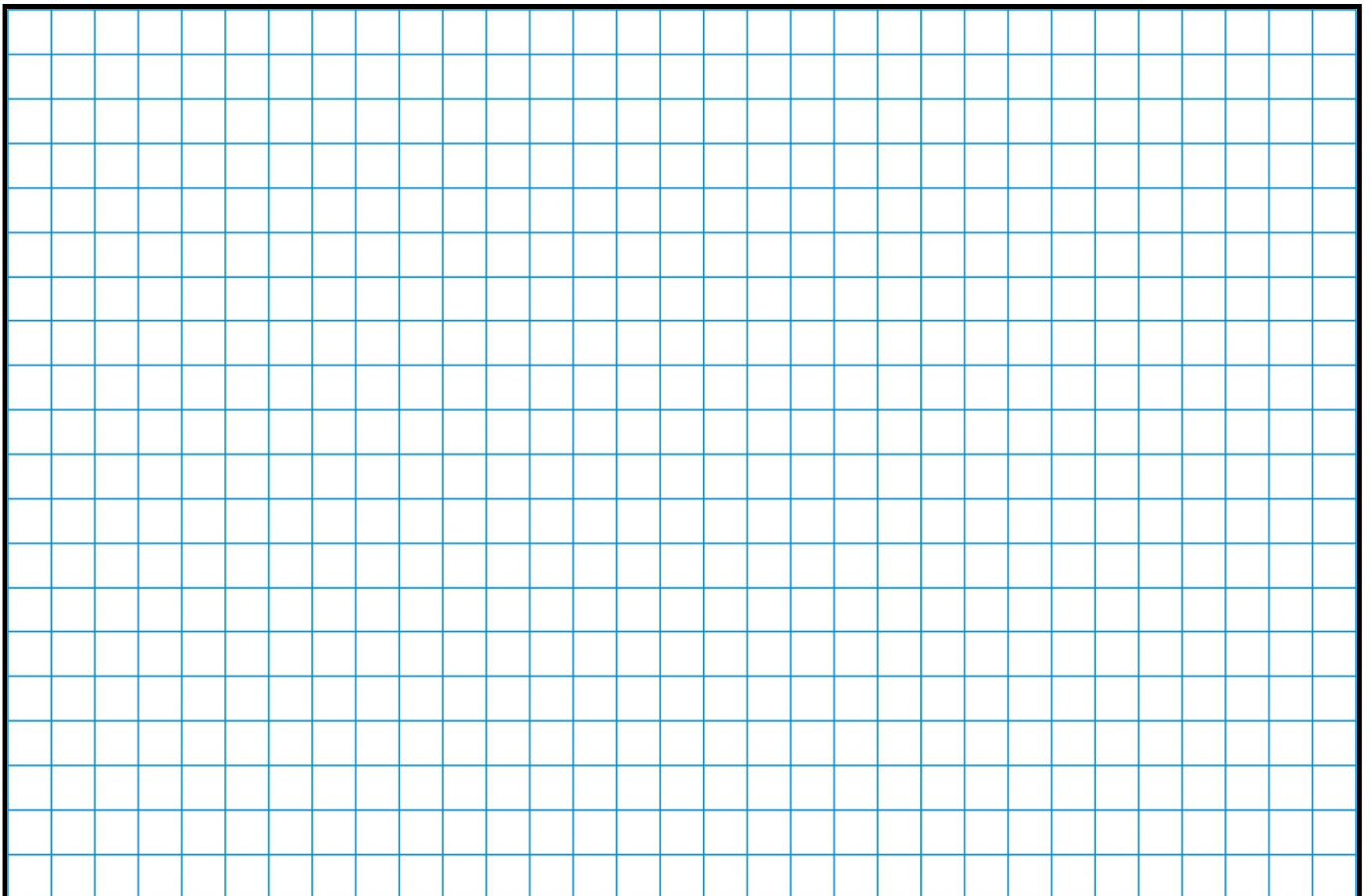
5

In einer **dritten Messreihe** wird der Betrag F_Z der Zentralkraft in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω gemessen, mit der sich der Wagen auf der Kreisbahn bewegt. Die Masse des Wagens wird dabei konstant auf $m = 1,5 \text{ kg}$ eingestellt, der Radius der Kreisbahn beträgt $r = 0,50 \text{ m}$ (Messwerttabelle 3, rechts).

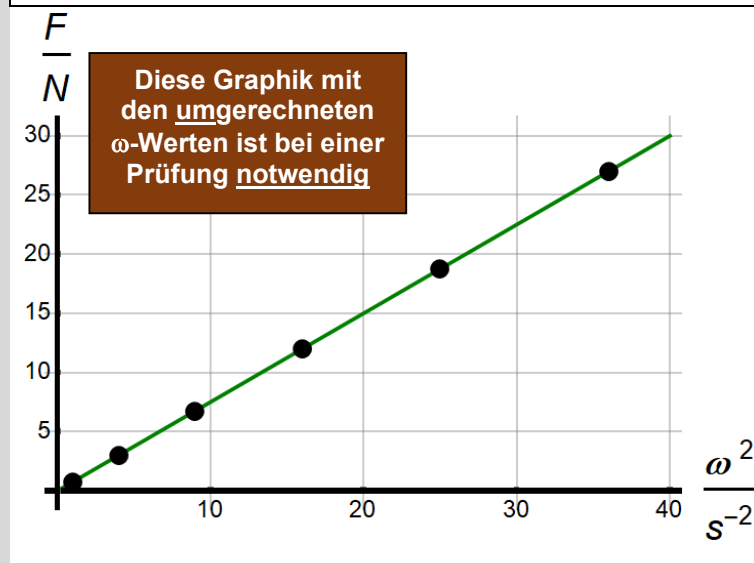
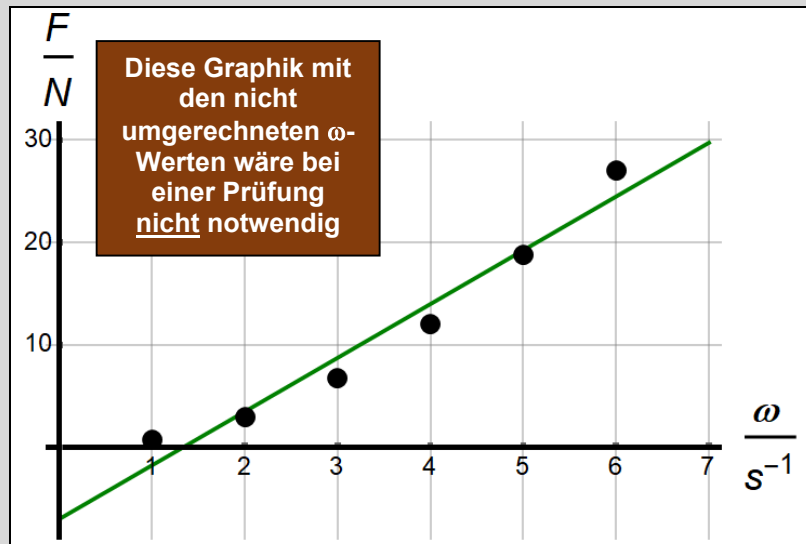
Zeigen Sie durch geeignete graphische Auswertung, dass $F_Z \sim \omega^2$. Ermitteln Sie aus der Graphik die Proportionalitätskonstante k_ω so, dass $F_Z = k_\omega \cdot \omega^2$.

Messwerte 3:

$\frac{\omega}{s^{-1}}$	$\frac{F_Z}{N}$
1,0	0,75
2,0	3,00
3,0	6,75
4,0	12,00
5,0	18,75
6,0	27,00



Lösung zu Aufgabe 5:



Werden die Kräfte F_Z gegen die Kreisfrequenz ω aufgetragen (Abbildung links oben), lässt sich durch die Messpunkte **keine** vernünftige Gerade ziehen d.h.

$$F_Z \sim \omega$$

Zur Überprüfung, ob $F_Z \sim \omega^2$, muss F_Z gegen ω^2 aufgetragen werden. Die entsprechend umgerechnete Wertetabelle sieht folgendermaßen aus:

Messwerte 3':

$\frac{\omega^2}{s^{-2}}$	$\frac{F_Z}{N}$
1,0	0,75
4,0	3,00
9,0	6,75
16,0	12,00
25,0	18,75
36,0	27,00

Diese Tabelle mit den umgerechneten ω -Werten ist bei einer Prüfung notwendig

Die graphische Auswertung (Abb. links unten) ergibt eine

Ursprungsgerade $\rightarrow F_Z \sim \omega^2$

Aus der Steigung der Geraden (Steigungsdreieck !) ergibt sich:

$$k_\omega = 0,75 \frac{N}{s^{-2}} \rightarrow F_Z = 0,75 \frac{N}{s^{-2}} \omega^2$$

Aufgabe

6

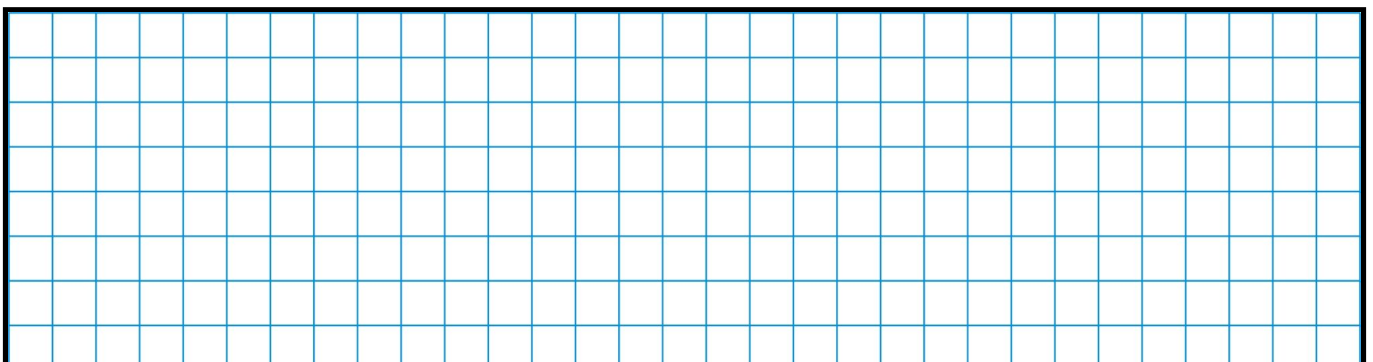
Die Ergebnisse der Aufgaben 3, 4 und 5 waren jeweils eine Proportionalität:

$$F_Z \sim r$$

$$F_Z \sim m$$

$$F_Z \sim \omega^2$$

Fassen Sie diese drei Proportionalitäten zu **einer einzigen Proportionalitäts-Gleichung** zusammen. Dabei sei k die Proportionalitätskonstante:



Lösung zu Aufgabe 6:

$$F_Z \sim m \cdot r \cdot \omega^2 \quad \rightarrow \quad F_Z = k \cdot m \cdot r \cdot \omega^2$$

Aufgabe

7

Berechnen Sie die Proportionalitätskonstante k aus dem Ergebnis von Aufgabe 6 und geben Sie die allgemeine Gleichung für die Zentralkraft an:

Lösung zu Aufgabe 7:

Ergebnisse aus Aufgaben 3 bis 5 sowie Teilaufgabe 6:

$$F_Z = k_r \cdot r = 54 \frac{N}{m} r = k \cdot r \cdot 1,50 \text{ kg} \cdot (6,0 \text{ s}^{-1})^2 \rightarrow k = 1$$

$$F_Z = k \cdot r \cdot m \cdot \omega^2 \quad \text{und} \quad F_Z = k_m \cdot m = 18 \frac{N}{kg} m = k \cdot 0,50 \text{ m} \cdot m \cdot (6,0 \text{ s}^{-1})^2 \rightarrow k = 1$$

$$F_Z = k_\omega \cdot \omega^2 = 0,75 \frac{N}{s^{-2}} \omega^2 = k \cdot 0,50 \text{ m} \cdot 1,50 \text{ kg} \cdot \omega^2 \rightarrow k = 1$$

$$\rightarrow F_Z = r \cdot m \cdot \omega^2 \quad (k \text{ ist dimensionslos !})$$

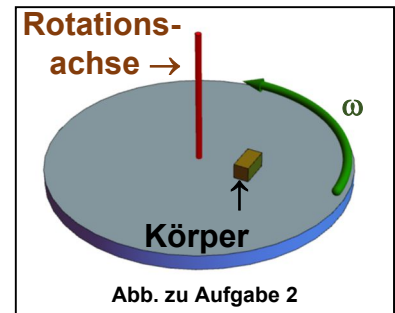
Aufgabe

8

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben zur Zentralkraft auf einem separaten Blatt und fügen Sie das Blatt diesem Dokument bei:

- 1.) Eine Stahlkugel der Masse $m = 1,50 \text{ kg}$ bewegt sich an einem Seil auf einer Kreisbahn des Radius $r = 5,0 \text{ m}$. Das Seil hat eine maximale Reißfestigkeit von 175 N . Berechnen Sie die kürzeste mögliche Umdrehungsdauer T_{\min} der Kugel.

- 2.) Auf einer sich rotierenden Stahlplatte befindet sich ein Körper der Masse $m = 250 \text{ g}$ (Abbildung rechts). Die Haftreibungszahl μ_0 zwischen dem Körper und der Stahlplatte beträgt $0,30$, der Abstand zwischen Stahlplatte und Rotationsachse $r = 20,0 \text{ cm}$.
- 2.1.) Zeichnen Sie einen Kräfteplan (aus Sicht eines ruhenden Beobachters) mit allen auf die Masse einwirkenden Kräften.
- 2.2.) Berechnen Sie den maximalen Betrag v_0 der Bahngeschwindigkeit, bei der der Körper gerade noch nicht nach „außen wegrutscht“.



- 3.) In Labors werden gelegentlich Ultra-Zentrifugen eingesetzt, die bei einer Umdrehungszahl von **500 000 pro Minute** eine Suspension in ihre Bestandteile auftrennen soll. Die Proberöhrchen bewegen sich dabei auf einer Kreisbahn des Radius 15 cm .
- 3.1.) Berechnen Sie den Betrag a_z der Zentralbeschleunigung und geben Sie an, das wievielfache a_z von der Erdbeschleunigung g ist.
- 3.2.) Berechnen Sie den Betrag F_Z der Zentralkraft, die in einer solchen Zentrifuge auf einen Körper der Masse $m = 1,0 \text{ μg}$ wirkt.

Lösungen zu Aufgabe 8

Lösung zu 1:

$$F_Z = F_{\text{Reib}} = \frac{4}{m \pi^2 r} \rightarrow T_{\min} = \frac{2 \sqrt{m r \pi}}{\sqrt{F_{\text{Reib}}}} = 1,3 \text{ s}$$

Lösung zu 2:

Kräfteplan muss enthalten:

- Zentralkraft \vec{F}_Z
- Gewichtskraft \vec{F}_G
- Gegenkraft \vec{F}_{Geg} = $-\vec{F}_G$ zur Gewichtskraft

$$F_Z = m \omega^2 r = \frac{m}{v^2} = m g \mu_0 = F_{\text{Reib}} \rightarrow \sqrt{g \mu_0 r} = 0,77 \frac{m}{s}$$

Lösung zu 3:

$$a_z = \omega^2 r = (2 \pi f)^2 r = 4,1 \cdot 10^8 \frac{m}{s^2} = 4,2 \cdot 10^7 g$$

$$F_Z = m a_z = 0,41 \text{ kg}$$